CORRIGE DU CAHIER POUR PREPARER SA RENTREE EN PREMIERE

Lycée Albert Camus

Exercice n° 1

1. $D=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$D=\frac{6}{12}-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}$

$D=\frac{6-4+3}{12}$

$D=\frac{5}{12}$

2. $E=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)$

$E=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\left(\frac{24}{30}-\frac{25}{30}\right)$

$E=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\left(-\frac{1}{30}\right)$

$E=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{10}$

$E=\frac{40}{60}-\frac{45}{60}-\frac{6}{60}$

$E=-\frac{11}{60}$

3. $F=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}+1}$

$F=\dfrac{\frac{15}{10}-\frac{14}{10}}{\frac{8}{15}+1}$

$F=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{15}+\frac{15}{15}}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{15}}$

$F=\frac{1}{10}\times\frac{15}{23}$

$F=\frac{15}{10\times 23}$

$F=\frac{3\times 5}{2\times 5\times 23}$

$F=\frac{3}{46}$

Exercice n° 2

Pour A, on utilise $3^{29}=3^{27+2}=3^{27}\times 3^2$, ce qui permet de factoriser par 3^{27}

1. $A=\frac{3^{27}-3^{29}}{3^{28}}$

$A=\frac{3^{27}(1-3^2)}{3^{27}\times 3}$

$A=\frac{1-9}{3}=-\frac{8}{3}$

2. $B=\frac{2^5\times 4^{-5}}{8}$

$B=\frac{2^5\times (2^2)^{-5}}{2^3}$

$B=\frac{2^5\times 2^{-10}}{2^3}$

$B=2^{5-10-3}=2^{-8}$

3. $C=\frac{3^{-6}\times 5^5}{(5^2)^3\times 3^{-5}}$

$C=3^{-6}\times 3^5\times 5^5\times 5^{-6}.$

$C=3^{-1}\times 5^{-1}=\frac{1}{15}$

4. $D=\frac{8^2\times 9^{-5}}{3^{-11}\times 2^8}$

$D=\frac{(2^3)^2\times (3^2)^{-5}}{3^{-11}\times 2^8}$

$D=\frac{2^6\times 3^{-10}}{3^{-11}\times 2^8}$

$D=2^{6-8}\times 3^{-10+11}$

$D=2^{-2}\times 3=\frac{3}{4}$

5. $E=\frac{3^{1505}+3^{1505}+3^{1505}}{3^{1506}}$

$E=\frac{3\times 3^{1505}}{3^{1506}}$

$E=\frac{3^{1506}}{3^{1506}}=1$

Exercice n° 3

1. $J=\sqrt{48}$

$J=\sqrt{4^2\times 3}$

$J=\sqrt{4^2}\times\sqrt{3}$

$J=4\sqrt{3}$

2. Attention,

$\sqrt{36+64}\neq\sqrt{36}+\sqrt{64}$

$K=\sqrt{36+64}$

$K=\sqrt{100}$

K=10

3. $L=5\sqrt{27}-3\sqrt{48}$

$L=5\sqrt{3^2\times 3}-3\sqrt{4^2\times 3}$

$L=5\times 3\sqrt{3}-3\times 4\sqrt{3}$

$L=15\sqrt{3}-12\sqrt{3}$

$L=3\sqrt{3}$

4. $M=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}}\times\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}$

$M=\frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{2\times 11^2}}\times\frac{\sqrt{2\times 7^2}}{\sqrt{5^2}}$

$M=\frac{9\times 7\sqrt{2}}{5\times 11\sqrt{2}}$

$M=\frac{63}{55}$

Exercice n° 4

1. $f(x)=2x-3+\frac{1}{x+1}$

$=(2x-3)\times\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}$

$=\frac{(2x-3)(x+1)+1}{x+1}$

$=\frac{2x^2+2x-3x-3+1}{x+1}$

$f(x)=\frac{2x^2-x-2}{x+1}$

a. $f\left(\frac{2}{3}\right)=2\times\frac{2}{3}-3+\frac{1}{\frac{2}{3}+1}$

$=\frac{4}{3}-\frac{9}{3}+\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}$

$=-\frac{5}{3}+\frac{1}{\frac{5}{3}}$

$=-\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$

$=-\frac{25}{15}+\frac{9}{15}=-\frac{16}{15}$

b. $f\left(\sqrt{5}\right)=\frac{2\times\sqrt{5}^2-\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}$

$=\frac{10-\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}=\frac{8-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$

c. $f\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)^2-\left(\sqrt{3}-1\right)-2}{\sqrt{3}-1+1}$

$=\frac{2[(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1]-\sqrt{3}+1-2}{\sqrt{3}}$

$=\frac{2\times 3-4\sqrt{3}+2-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{7-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

Exercice n° 5

$B=(2x-9)(3-2x)+5(2x+1)^2$

$B=(6x-4x^2-27+18x)+5(4x^2+4x+1)$

$B=6x-4x^2-27+18x+20x^2+20x+5$

$B=16x^2+44x-22$

$C=4(x-6)^2-3(5x+3)(5x-3)$

$C=4(x^2-12x+36)-3(25x^2-9)$

$C=4x^2-48x+144-75x^2+27$

$C=-71x^2-48x+171$

Exercice n° 6

Exemple guidé - Factoriser des expressions

$A = 6x + 3 + 4(2x + 1)^2$

$A = 3(2x+1) + 4(2x+1)^2$

$A = (2x+1)[3 + 4(2x+1)]$

$A = (2x+1)(3+8x+4)$ donc $A = (2x+1)(8x+7)$

$B = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$
$B = 2(5x-1)^2 + 2(5x-1)$
$B = (5x-1)(2(5x-1)+2)$
$B = (5x-1)(10x-2+2)$
$B = 10x(5x-1)$

$C = (x^2-4) - (x+2)^2$
$C = (x-2)(x+2) - (x+2)^2$
$C = (x+2)((x-2)-(x+2))$
$C = (x+2)(x-2-x-2)$
$C = -4(x+2)$

Exercice n° 7

Exemple guidé - Factoriser des expressions

$A = 36x^2 - (5x+1)^2$

$A = (6x)^2 - (5x+1)^2$

$A = ((6x) + (5x+1))((6x) - (5x+1))$

$A = (6x+5x+1)(6x-5x-1)$ donc $A = (11x+1)(x-1)$

$B = (4x-3)^2 - 25x^2$
$B = (4x-3)^2 - (5x)^2$
$B = (4x-3-5x)(4x-3+5x)$
$B = (-x-3)(9x-3)$

$C = 49 - (5x+2)^2$
$C = 7^2 - (5x+2)^2$
$C = (7-(5x+2))(7+(5x+2))$
$C = (7-5x-2)(7+5x+2)$
$C = (-5x+5)(5x+9) = 5(-x+1)(5x+9)$

Exercice n° 8

Exemple guidé - Ecrire sous forme d'une seule fraction.

$A = 4 + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{4 \times (x+2)}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{4x+8+3}{x+2}$ *donc* $A = \dfrac{4x+11}{x+2}$

$B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5$
$B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5 \times \dfrac{3x-1}{3x-1}$
$B = \dfrac{2x - 5 \times (3x-1)}{3x-1}$
$B = \dfrac{2x - 15x + 5)}{3x-1}$
$B = \dfrac{-13x+5)}{3x-1}$

$C = \dfrac{4}{2x+6} - \dfrac{3}{x-5}$
$C = \dfrac{4}{2x+6} \times \dfrac{x-5}{x-5} - \dfrac{3}{x-5} \times \dfrac{2x+6}{2x+6}$
$C = \dfrac{4(x-5) - 3(2x+6)}{(x-5)(2x+6)}$
$C = \dfrac{4x - 20 - 6x - 18)}{2x^2 + 6x - 10x - 30}$
$C = \dfrac{-2x - 38)}{2x^2 - 4x - 30}$

Exercice n° 9

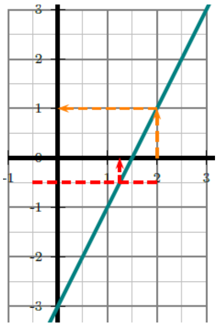
1. La largeur est x et la longueur est $x + 7$
   Le périmètre est donc $P(x) = 2x + 2(x+7) = 4x + 14$
2. L'aire est $\mathscr{A}(x) = x(x+7)$
3. Si $x = 13$ alors $P(13) = 4 \times 13 + 14 = 66$
   $\mathscr{A}(13) = 13 \times (13+7) = 260$

Exercice n° 10

1. Pour x entrées avec la première formule : $P_1(x) = 20 + 2x$
   avec la deuxième formule : $P_2(x) = 5x$

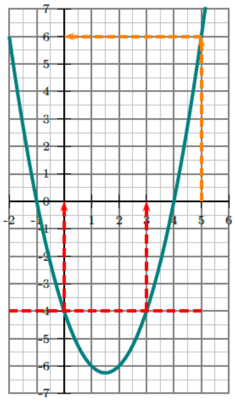
2. Pour $x = 4$, on a $P_1(4) = 20 + 2 \times 4 = 28$
   et $P_2(4) = 5 \times 4 = 20$
   La deuxième formule est la plus avantageuse.
   Pour $x = 25$, on a $P_1(25) = 20 + 2 \times 25 = 70$
   et $P_2(25) = 5 \times 25 = 125$
   La première formule est la plus avantageuse.

Exercice n° 11



1. On peut lire sur le graphique que l'image de 2 est environ 1 (voir graphique).
2. $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$
3. On peut lire sur le graphique que l'antécédent de $-0,5$ est environ 1,25 (voir graphique).
4. On cherche x tel que $f(x) = -0.5$
   soit tel que $2x - 3 = -0,5$
   $2x = 2,5$
   $x = 1,25$

Exercice n° 12



1. a. On peut lire sur le graphique que l'image de 5 est 6 (voir graphique).
   b. $f(5) = 5^2 - 3 \times 5 - 4 = 25 - 15 - 4 = 6$
2. Les antécédents de 0 sont -1 et 4.
3. On cherche les antécédents de -4.
   On peut lire sur le graphique que les antécédents de -4 sont 0 et 3. (voir graphique).
4. On a besoin de $f(1,5) = 1,5^2 - 3 \times 1,5 - 4 = -6,25$

x	$-\infty$	1.5	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	-6.25	$\nearrow$

5. Les racines de f sont -1 et 4.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice n° 13

1. a. On peut lire sur le graphique que l'image de $-\frac{3}{2}$ est environ 3 (voir graphique).
   b. $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 6\left(-\frac{3}{2}\right)$
   $= -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{18}{2}$
   $= -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{72}{8}$
   $= \frac{27}{8}$
2. a. $(x-3)(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$
   b. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$
   $= x\left(x^2 - x - 6\right)$
   $= x(x-3)(x+2)$
   c. On cherche les solutions de l'équation $f(x) = 0$
   $f(x) = 0 \iff x(x-3)(x+2) = 0$
   $\iff x = 0$ ou $x - 3 = 0$ ou $x + 2 = 0$
   $\iff x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -2$
   Les antécédents de 0 sont 0, 3 et -2
   d. On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
3. On a besoin de $f(-1) = 4$ et $f(1,75) = -8,25$

x	$-\infty$		-1		1.75		$+\infty$
variation de f		$\nearrow$	4	$\searrow$	-8.25	$\nearrow$	

4. $f(x) = x(x-3)(x+2)$
   le premier facteur change de signe en 0 ;
   le deuxième facteur change de signe en 3 ;
   le troisième facteur change de signe en -2.

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5. a. Les antécédents de -6 sont environ $-2,5$, 1 et 2,5.
   b. $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ et $-6x + 6 = -6(x-1)$
   c. ✷ $f(x) = -6 \iff x^3 - x^2 - 6x = -6$
   $\iff x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0$
   $\iff x^2(x-1) - 6(x-1) = 0$
   $\iff (x-1)\left(x^2 - 6\right) = 0$
   $\iff x - 1 = 0$ ou $x^2 - 6 = 0$
   $\iff x = 1$ ou $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$
   $S = \{1; \sqrt{6}; -\sqrt{6}\}$

Exercice n° 14

Algo 1 si x=2

x	*a*	*b*	*c*
2	$2^2 = 4$		
		$-6 \times 2 = -12$	
			$4 - 12 + 8 = 0$

Si x=2, l'algo 1 affiche 0

Algo 2 si x=2

x	*a*	*b*	*c*
2	$2 - 3 = -1$		
		$(-1)^2 = 1$	
			$1 - 1 = 0$

Si x =2, l'algo 2 affiche 0

Algo 1 si x = - 3

x	a	b	c
-3	$(-3)^2 = 9$		
		$-6 \times (-3) = 18$	
			$9 + 18 + 8 = 35$

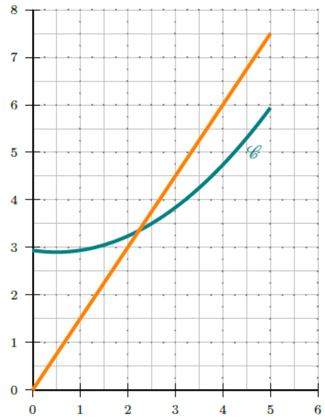
Si $x = -3$, l'algo1 affiche 35

Algo 2 si x = - 3

x	a	b	c
-3	$-3 - 3 = -6$		
		$(-6)^2 = 36$	
			$36 - 1 = 35$

Si $x = -3$, l'algo 2 affiche 35

Il semble que les deux algorithmes donnent le même résultat pour toute valeur de x.
L'expression algébrique de l'algorithme 1 est $x^2 - 6x + 8$
L'expression algébrique de l'algorithme 2 est $(x-3)^2 - 1$
Or $(x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8$



Exercice n° 15

1. le coût est minimal pour $x = 0,5$.
   Autrement dit, le coût de fabrication est minimal quand on fabrique 50 cartes à puces.
2. On a $R(x) = 1.5x$ où $R(x)$ est exprimé en centaines d'euros.
3. Voir graphique
4. $B(x) = R(x) - f(x)$
   $B(x) = 1,5x - (0,15x^2 - 0,15x + 2,9375)$
   $B(x) = -0,15x^2 + 1,65x - 2,9375$
5. L'entreprise est bénéficiaire quand la courbe de R est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$, c'est à dire quand $x > 2,2$
   Il faut donc que l'entreprise produise au moins 220 carte à puces.

Exercice n° 16

1. $2x + 3 = -3x + 7$
   $2x + 3x = -3 + 7$
   $5x = 4$
   $x = \frac{4}{5}$ donc $S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$
2. $-4x + 1 = 9$
   $-4x = 9 - 1$
   $-4x = 8$
   $x = \frac{8}{-4} = -2$ donc $S = \{-2\}$
3. $-x = x + 16$
   $-2x = 16$
   $x = \frac{16}{-2} = -8$ donc $S = \{-8\}$
4. $(-x-4)(-x+7) = 0$
   $-x - 4 = 0$ ou $-x + 7 = 0$
   $x = -4$ ou $x = 7$ donc $S = \{-4; 7\}$
5. $9(-3x-1)(6x-36) = 0$
   $-3x - 1 = 0$ ou $6x - 36 = 0$
   $-3x = 1$ ou $6x = 36$
   $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 6$ donc $S = \left\{-\frac{1}{3}; 6\right\}$
6. $-x(x+16)(2-5x) = 0$
   Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut que l'un au moins des facteurs soit nul.
   $-x = 0$ ou $x + 16 = 0$ ou $2 - 5x = 0$
   $x = 0$ ou $x = -16$ ou $x = \frac{2}{5}$
   donc $S = \left\{0; -16; \frac{2}{5}\right\}$
7. $\frac{-3x-1}{8-5x} = 0$
   Valeur interdite : $8 - 5x = 0 \iff x = \frac{8}{5}$
   $\frac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff -3x - 1 = 0$ et $x \neq \frac{8}{5}$
   $\frac{-3x-1}{8-5x} = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$ et $x \neq \frac{8}{5}$
   $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$
8. $\frac{5-8x}{x-2} = 3$
   Valeur interdite : $x - 2 = 0 \iff x = 2$
   $\frac{5-8x}{x-2} - 3 \times \frac{x-2}{x-2} = 0$
   $\frac{(5-8x) - 3 \times (x-2)}{x-2} = 0$
   $\frac{11-11x}{x-2} = 0$
   $\frac{11-11x}{x-2} = 0 \iff 11 - 11x = 0$ et $x \neq 2$
   $\frac{11-11x}{x-2} = 0 \iff x = 1$ et $x \neq 2$
   $S = \{1\}$

Exercice n° 17

pour les questions 3 à 5, on a fait le produit en croix, on peut aussi mettre au même dénominateur

1. $(5x-1)(x-9) - (x-9)(2x-1) = 0$
   $(x-9)\left((5x-1) - (2x-1)\right) = 0$
   $(x-9)(5x - 1 - 2x + 1) = 0$
   $3x(x-9) = 0$
   $3x = 0$ ou $x - 9 = 0$
   $x = 0$ ou $x = 9$ donc $S = \{0; 9\}$
2. $(x-1)(2x-7) = 4x^2 - 28x + 49$
   $(x-1)(2x-7) = (2x-7)^2$
   $(x-1)(2x-7) - (2x-7)^2 = 0$
   $(2x-7)\left((x-1) - (2x-7)\right) = 0$
   $(2x-7)(x - 1 - 2x + 7) = 0$
   $(2x-7)(-x+6) = 0$
   $2x - 7 = 0$ ou $-x + 6 = 0$
   $x = \frac{7}{2}$ ou $x = 6$ donc $S = \left\{\frac{7}{2}; 6\right\}$
3. $x + 1 = \frac{9}{x+1}$
   Valeur interdite : $x + 1 = 0 \iff x = -1$
   $x + 1 = \frac{9}{x+1} \iff (x+1)^2 = 9$ et $x \neq 1$
   $\iff x + 1 = 3$ ou $x + 1 = -3$ et $x \neq 1$
   $\iff x = 2$ ou $x = -4$ et $x \neq 1$
   $S = \{-4; 2\}$
4. $\frac{3x-1}{x-5} = \frac{3x-4}{x}$
   Valeurs interdites : $x - 5 = 0 \iff x = 5$
   $x = 0$
   $\frac{3x-1}{x-5} = \frac{3x-4}{x} \iff x(3x-1) = (x-5)(3x-4)$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$
   $\iff 3x^2 - x = 3x^2 - 4x - 15x + 20$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$
   $\iff -x + 19x = 20$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$
   $\iff x = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$ et $x \neq 5$ et $x \neq 0$
   $S = \left\{\frac{10}{9}\right\}$
5. $\frac{x^2-3x}{(x-3)^2} = 4$
   Valeurs interdites : $x - 3 = 0 \iff x = 3$
   $\frac{x^2-3x}{(x-3)^2} = 4 \iff x^2 - 3x = 4(x-3)^2$ et $x \neq 3$
   $\iff x(x-3) - 4(x-3)^2 = 0$ et $x \neq 3$
   $\iff (x-3)(x - 4(x-3)) = 0$et $x \neq 3$
   $\iff (x-3)(-3x+12) = 0$ et $x \neq 3$
   $\iff x - 3 = 0$ ou $-3x + 12 = 0$ et $x \neq 3$
   $\iff x = 4$

Ici, 3 est valeur interdite, donc 3 ne peut pas être solution S={4}

Exercice n° 18

1. $6x + 7 > 4x + 8$
   $6x - 4x > 8 - 7$
   $2x > 1$
   $x > \frac{1}{2}$
   $S = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$
2. $x + 1 \geqslant 9x + 25$
   $x - 9x \geqslant 25 - 1$
   $-8x \geqslant 24$
   $x \leqslant \frac{24}{-8}$
   $x \leqslant -3$
   $S =]-\infty; -3]$
3. $-7 \leqslant 4x + 9$
   $4x \geqslant -16$
   $x \geqslant -4$
   $S = [-4; +\infty[$

Exercice n° 19

1. Signe de chaque facteur :

$-3x+12>0 \iff x<4$ $\qquad$ $7-2x>0 \iff x<\dfrac{7}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		4		$+\infty$
signe de $-3x+12$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $7-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $P(X)\geqslant 0 \iff x\in\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right]\cup[4;+\infty[$

Exercice n° 20

1. $(x-8)(-1-10x)\leqslant 0$

Signe de chaque facteur :

$x-8>0 \iff x>8$ $\qquad$ $-1-10x>0 \iff x<-\dfrac{1}{10}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{10}$		8		$+\infty$
signe de $x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-10$		$+$	0	$-$		$-$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{10}\right]\cup[8;+\infty[$

2. $(3x+2)^2-(3x+2)(5x+1)\leqslant 0$

$(3x+2)\left((3x+2)-(5x+1)\right)\leqslant 0$

$(3x+2)(-2x+1)\leqslant 0$

Signe de chaque facteur :

$3x+2>0 \iff x>-\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $-2x+1>0 \iff x<\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice n° 21

1. $Q(x)=\dfrac{-2x+3}{x+4}$

Valeur interdite : $x+4=0 \iff x=-4$

$-2x+3>0 \iff x<\dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $x+4>0 \iff x>-4$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe du quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

2. $Q(x)\leqslant 0 \iff x\in\,]-\infty;-4[\,\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice n° 22

1. $\dfrac{3}{2x-7}\leqslant 0$

Valeur interdite : $2x-7=0 \iff x=\dfrac{7}{2}$

Le signe de $\dfrac{3}{2x-7}$ ne dépend que du signe de $2x-7$.

$\dfrac{3}{2x-7}$ est négatif quand $2x-7$ est négatif.

$2x-7<0 \iff x<\dfrac{7}{2}$

$S=\left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[$

2. $5+\dfrac{2}{x+3}\leqslant 0$

Valeur interdite : $x+3=0 \iff x=-3$

$5+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{5(x+3)+2}{x+3}=\dfrac{5x+17}{x+3}$

$5x+17>0 \iff x>-\dfrac{17}{5}$ $\qquad$ $x+3>0 \iff x>-3$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{17}{5}$		-3		$+\infty$
signe de $5x+17$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S=\left[-\dfrac{17}{5};-3\right[$

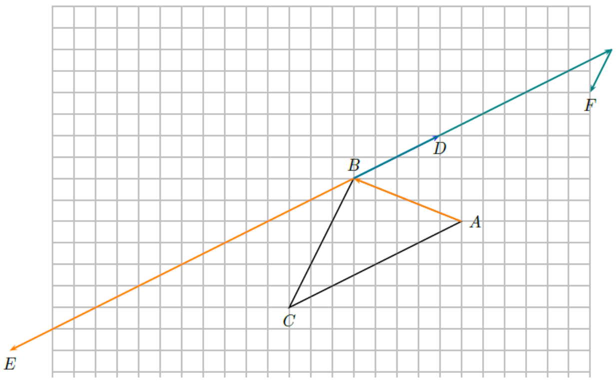
Exercice n° 23

1. réponses b et d
2. réponse a et d
3. réponse b
4. réponse d
5. réponse a
6. réponse c
7. réponse a
8. réponses a et b
9. réponses a et c
10. réponses a et c

Exercice n° 24

On considère le triangle ABC, construire les points D, E et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



Exercice n° 25

1. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$;
2. $-3\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix}$;
3. $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice n° 26

1. $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

$AB^2 = \left(\frac{1}{2} - (-2)\right)^2 + (-1-3)^2$

$AB^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-4)^2$

$AB^2 = \frac{25}{4} + 16$

$AB^2 = \frac{89}{4}$ donc $AB = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$

2. E est le milieu de $[BC]$ donc $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$.

$\begin{cases} x_E = \dfrac{\frac{1}{2} + 5}{2} \\ y_E = \dfrac{-1+1}{2} \end{cases}$.

$\begin{cases} x_E = \dfrac{11}{4} \\ y_E = 0 \end{cases}$. $\qquad E\left(\frac{11}{4}; 0\right)$

3. D symétrique de B par rapport à A donc A est le milieu de $[BD]$.

On doit donc avoir $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_A = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$.

Soit $\begin{cases} -2 = \dfrac{\frac{1}{2} + x_D}{2} \\ 3 = \dfrac{-1 + y_D}{2} \end{cases}$.

$\begin{cases} -4 = \dfrac{1}{2} + x_D \\ 6 = -1 + y_D \end{cases}$.

$\begin{cases} -4 - \dfrac{1}{2} = x_D \\ 6 + 1 = y_D \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} x_D = -\dfrac{9}{2} \\ y_D = 7 \end{cases}$. $\qquad D\left(-\frac{9}{2}; 7\right)$

Exercice n° 27

$ABCD$ soit un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Autrement dit, si et seulement si $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

$\begin{cases} -2 - 1 = -4 - x_D \\ 7 - 3 = 1 - y_D \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = -3 \end{cases}$ $\qquad D(-1; -3)$

Exercice n° 28

1. A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Autrement sit, si et seuelemnt si le déterminant $det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 0$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Donc $det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \times (-3) - 6 \times (-4) = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc que A, B et C sont alignés

2. (AB) et (DE) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc $det\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{DE}\right) = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - (-4) \times (-4) = 0$

Le déterminant est nul. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires donc que(AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice n° 29

1. Pour tracer la droite d, il suffit de déterminer deux points de cette droite :
   Si $y=0$, alors $x=-3,5$ donc le point de coordonnées $(-3,5;0)$ appartient à d.
   Si $x=1$, alors $y=3$ donc le point de coordonnées $(1;3)$ appartient à d.
   Il ne reste qu'à placer les points obtenus et à tracer la droite.

2. Si $x=-\dfrac{1}{2}$ alors $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)-3y+7=0$ donc $y=2$.
   L'ordonnée du point A est $y_A=2$.

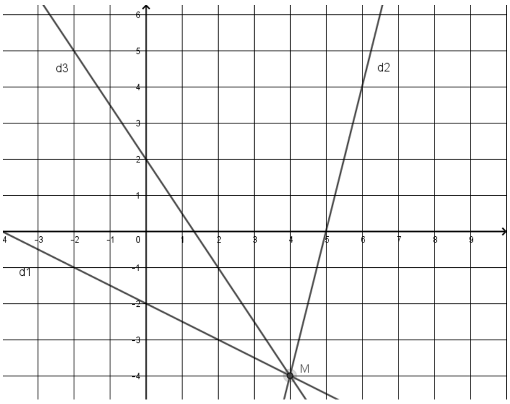
3. Si $y=1$ alors $2x-3\times1+7=0$ donc $x=-2$.
   L'abscisse du point B est $x_B=-2$.

Exercice n° 30

1. Un point $M(x;y)$ appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
   Autrement dit, si et seulement si $det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0$.
   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-4\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$
   Donc $det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}x-2&-3\\y-4&-3\end{vmatrix}=-3(x-2)-(-3)(y-4)=-3x+3y-6$
   $M(x;y)$ appartient à (AB) si et seulement si $-3x+3y-6=0$.
   $-3x+3y-6=0$ est une équation cartésienne de (AB).
   $x-y+2=0$ en est une autre.
2. Un point $M(x;y)$ appartient à la droite Δ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
   Autrement dit, si et seulement si $det\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{AB}\right)=0$.
   $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M-x_C\\y_M-y_C\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-5\\y-10\end{pmatrix}$
   $det\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}x-5&-3\\y-10&-3\end{vmatrix}=-3(x-5)-(-3)(y-10)=-3x+3y-15$.
   $-3x+3y-15=0$ est une équation de la droite Δ.
   $x-y+3=0$ en est une autre.

Exercice n° 31

1. Pour tracer la droite d_1, il suffit de déterminer deux points de cette droite :
   Si $x=0$, alors $y=-2$ donc le point de coordonnées $(0;-2)$ appartient à d_1.
   Si $x=-2$, alors $y=-1$ donc le point de coordonnées $(-2;-1)$ appartient à d_1.
   Il ne reste qu'à placer les points obtenus et à tracer la droite.
   Pour tracer la droite d_2, on procède de la même façon.
2. a. Tracer la droite d_3 passant par le point $A(-2;5)$ et de coefficient directeur $m=-\dfrac{3}{2}$.
   b. L'équation réduite de d_3 est de la forme $y=-\dfrac{3}{2}x+p$.
   Puisque $A\in d_3$, on doit avoir $y_A=-\dfrac{3}{2}x_A+p$ soit $5=-\dfrac{3}{2}\times(-2)+p$.
   On en déduit que $p=2$.
   L'équation réduite de d_3 est de la forme $y=-\dfrac{3}{2}x+2$.
3. a. d_1 et d_2 n'ont pas le même coefficient directeur donc elles sont sécantes.
   b. Les coordonnées de M sont les solutions du système $\begin{cases}y=-0,5x-2\\y=4x-20\end{cases}$
   On a donc $-0,5x-2=4x-20$ soit $x=\dfrac{18}{4,5}=4$
   On en déduit que $y=4\times4-20=-4$
   $M(4;-4)$
   c. $-\dfrac{3}{2}x_M+2=-\dfrac{3}{2}\times4+2=-6+2=-4=y_M$
   Les coordonnées de M vérifient l'équation de d_3 donc $M\in d_3$.



Exercice n° 32

1. réponse b
2. réponse a
3. réponse b
4. réponse c
5. réponse b
6. réponse a
7. réponse d

Pour les questions 6 et 7, on peut représenter la situation par un arbre pour compter toutes les issues

Exercice n° 33

1. $p(A)=\dfrac{1}{4}$ et $p(B)=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}$
2. $\overline{A}$: « ne pas tirer de trèfle » . $p(\overline{A})=1-p(A)=\dfrac{3}{4}$
3. $A\cup B$: « Tirer un trèfle ou tirer un roi » et $p(A\cup B)=\dfrac{11}{32}$.
   $A\cap B$: « Tirer le roi de trèfle » et $p(A\cap B)=\dfrac{1}{32}$

Exercice n° 34

1. On doit avoir $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$ soit $0,2+0,25+0,1+p_4+2p_4=1$
   On obtient donc $p_4=0,15$ et par conséquent $p_5=0,3$
2. a. La probabilité que la flèche indique un multiple de 2 est $0,25+0,15=0,4$
   b. La probabilité que la flèche indique un secteur avec un numéro inférieur ou égal à 3 est $0,2+0,25+0,1=0,55$

Exercice n° 35

	Nombre d'élèves ayant eu la grippe	Nombre d'élèves n'ayant pas eu la grippe	Total
Nombre d'élèves vaccinés	9	291	300
Nombre d'élèves non vaccinés	119	861	980
Total	128	1 152	1 280

2. $p(A) = \dfrac{300}{1280} = \dfrac{15}{64}$ $\quad p(B) = \dfrac{128}{1\,280} = \dfrac{1}{10}$ $\quad p(C) = \dfrac{9}{1\,280}$

3. $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{119}{980} = \dfrac{17}{140}$

Exercice n° 36

1. $A = \dfrac{3}{\sqrt{5}+1}$

$A = \dfrac{3}{\sqrt{5}+1} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$

$A = \dfrac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}$

$A = \dfrac{3\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}^2-1^2} = \dfrac{3\sqrt{5}-3}{4}$

2. $B = \dfrac{-2}{\sqrt{7}-2}$

$B = \dfrac{-2}{\sqrt{7}-2} \times \dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$

$B = \dfrac{-2\sqrt{7}-4}{\sqrt{7}^2-2^2}$

$B = \dfrac{-2\sqrt{7}-4}{3}$

3. $C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

$C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \times \dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

$C = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2-\sqrt{5}^2}$

$C = \dfrac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{4}$

$C = \dfrac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5}$

4. $D = \dfrac{6-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}$

$D = \dfrac{6-\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \times \dfrac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

$D = \dfrac{\left(6-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}$

$D = \dfrac{24+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2}{4^2-\sqrt{2}^2}$

$D = \dfrac{22+2\sqrt{2}}{14} = \dfrac{11+\sqrt{2}}{7}$

Exercice n° 37

1. $\phi^2-\phi-1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1$

$= \dfrac{1^2+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{4} - \dfrac{2+2\sqrt{5}}{4} - \dfrac{4}{4}$

$= \dfrac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}$

$= 0$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$

$= \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}^2-\sqrt{n+1}^2}$

$= \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-n-1}$

$= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Exercice n° 38

$\mathscr{A}_{IMN} = \mathscr{A}_{ABCD} - \mathscr{A}_{MCN} - \mathscr{A}_{IDN} - \mathscr{A}_{BMIA}$

$= 6^2 - \dfrac{1}{2} \times (6-x) \times x - \dfrac{1}{2} \times 3 \times (6-x) - \dfrac{(x+3)\times 6}{2}$

en mettant en ½ en facteur pour les 3 derniers termes

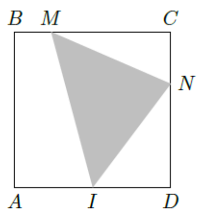
$Aire(IMN) = 36 - \frac{1}{2}((6-x)x + 3(6-x) + 6(x+3)$

$= 36 - \frac{1}{2}(6x - x^2 + 18 - 3x + 6x + 18)$

$=36 - \frac{1}{2}(-x^2 + 9x + 36)$

$= \dfrac{72+x^2-9x-36}{2}$

$= \dfrac{x^2-9x+36}{2}$



Exercice n° 39

1. Puisque $x+y=20$, on a $y = 20-x$.

2. $P = xy = x(20-x)$

$P \geqslant 91 \iff x(20-x) \geqslant 91$

$\iff 20x - x^2 - 91 \geqslant 0$

Or $(7-x)(13-x) = 91 - 7x - 13x + x^2 = x^2 - 20x + 91$.

$P \geqslant 91 \iff -x^2 + 20x - 91 \geqslant 0$

$\iff x^2 - 20x + 91 \leqslant 0$

$\iff (7-x)(13-x) \leqslant 0$

3. On dresse le tableau de signes de l'expression $R(x) = (7-x)(13-x)$

$7 - x > 0 \iff x < 7$

$13 - x > 0 \iff x < 13$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		7		13		$+\infty$
signe de $7-x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $13-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [7;13]$ et $y \in [7;13]$ avec $x+y=20$.